Modelo de tiempo continuo para la programación de la producción en una línea multi-producto con restricciones de inventario reales ⋆

Rafael, Vargas[1], Matías, Nicolaus[1], and Gisela, Müller[1]

Universidad Adventista del Plata, Libertador San Martín, Entre Ríos
https://uap.edu.ar

Abstract. La planificación de actividades en ambientes industriales reales posee relaciones y decisiones complejas, las cuales en general son representadas mediante modelos en tiempo discreto. Sin embargo, dicho tipo de modelos requieren potencias de computo elevadas cuando se los compara con los modelos en tiempo continuo. En este trabajo se busca implementar un modelo con los beneficios de los programas de tiempo continuo, y ciertas características de los modelos de tiempo discreto.

Keywords: Optimización matemática · Programación de la producción · Aplicaciones industriales.

1 Introducción

Para llevar adelante un determinado proceso productivo, la dirección de la empresa debe desarrollar una serie de planes, los cuales resumen los tiempos y formas en que se llevarán las distintas actividades requeridas para obtener el producto en cuestión, contemplándose además los recursos que serán utilizados en cada actividad. Dichos planes se encuentran clasificados normalmente de acuerdo al horizonte temporal en los que se deben desarrollar [1].

Tradicionalmente en el ámbito de las Ciencias de Administración de la Producción (CAP) se distinguen en tres grandes grupos: planes estratégicos, plan de producción de largo plazo y planes tácticos, correspondiendo estos a periodos de tiempo que van disminuyendo desde algunos años en el primero de los casos hasta los días u horas en el último [2]. Por otra parte, en el ámbito de la Ingeniería de Procesos (IP) se reconocen cuatro niveles de planeamiento: planificación de la cadena de suministros, la planificación de la producción, la secuenciación de pedidos y el control de la producción [3]. Correspondiendo los dos últimos al nivel táctico de la teoría de Administración de la Producción. Si bien, ambas ramas de la ciencia (CAP e IP) comparten la injerencia sobre cuestiones del planeamiento de la producción, proveen enfoques complementarios a las misma problemática. Las ramas de la administración se centra en los problemas de planificación desde

⋆ Universidad Adventista del Plata.

un punto de vista holístico, entendiendo al sistema empresarial como un todo, donde las decisiones de cómo y cuándo producir un producto están supeditadas a cuestiones estratégicas, económicas, ambientales y sociales. Se puede decir que las CAP proponen clásicamente una metodología de planificación que van desde lo general a lo particular. Según esta metodología, en cada uno de los niveles de planificación (estratégica, de largo plazo y táctica), se debe tomar una serie de decisiones asociadas a los mismos. Para ello se omite la interacción entre las decisiones que se deben tomar en dicho nivel y las que se deben tomar en niveles correspondientes a los periodos de tiempo más cortos. En los mejores casos, se remplaza dicha interacción por criterios heurísticos, los cuales orientan las decisiones de forma que los planes de más alto nivel no afecten negativamente la factibilidad de los planes que se generen luego a niveles más bajos; por ejemplo, que los planes de ventas no superen un porcentaje dado de la capacidad productiva máxima (cercano al 80%), para así dar holgura al sistema productivo para llevar adelante los pedidos programados.

La metodología propuesta desde las CAP brinda un ordenamiento jerárquico de las decisiones, el cual reduce drásticamente la combinatoriedad del problema. Esto último es indispensable cuando la mayoría de las decisiones necesarias sean tomadas por personas, entrenadas o no. Sin embargo, este procedimiento produce planes sub-óptimos, es decir que los mismos, si bien son factibles, podrían ser mejorados, al menos teóricamente. Este es el punto de partida de los desarrollos realizados el ámbito de la IP, los cuales se apoyan en sistemas informáticos para optimizar los recursos, teniendo en cuenta las distintas restricciones productivas en forma simultánea. Es así que los investigadores de la corriente de IP han concentrado sus esfuerzos en modelar computacionalmente el funcionamiento de los sistemas productivos, para luego utilizar dicha información en la obtención de planes de producción óptimos. Por otra parte, recientemente se ha avanzado hacia la integración de los horizontes temporales de planificación, con el objetivo de obtener nuevas ventajas competitivas o mejorar las actuales [3–6].

Para definir un plan de producción se debe tener en cuenta diversas restricciones operativas, entre las cuales se pueden mencionar los balances de masa, restricciones de tiempo y de precedencias, tamaños de inventario, limitaciones de recursos energéticos y/u operarios [7]. Actualmente los modelos matemáticos se han convertido en uno de los principales enfoques utilizados para tratar este tipo de problemas, debido a la capacidad de incorporar en un mismo modelo las distintas restricciones del proceso [8]. A su vez la capacidad computacional ha alcanzado niveles que hacen posible su utilización para la programación de procesos de escala industrial [9]. Aunque en el caso de los problemas más grandes todavía se registran trabajos de investigación que buscan acelerar la resolución de los problemas matemáticos obtenidos [10]. Sin embargo, los modelos de programación matemática poseen una barrera importante para su difusión masiva, en lo que respecta al desarrollo de los mismos y su implementación. Esto se debe en parte a que el funcionamiento de los sistemas productivos reales implican normalmente decisiones, muchas de ellas interrelacionadas, las cuales son relativamente difíciles de traducir a restricciones matemáticas. La programación disyuntiva constituye enfoque desarrollado para facilitar la traducción de procesos decisorios complejos a términos matemáticos. La misma ha sido utilizada con éxito en distintos ámbitos industriales para describir intrincados conjuntos de decisiones [11, 12].

Un problema recurrente en la implantación de sistemas de programación óptima basados en modelado matemático estriba en que existen dos grupos principales de enfoques de modelado: en tiempo continuo y en tiempo discreto [7]. Los modelos de tiempo continuo presentan en general la ventaja de requerir un menor número de variables binarias, para igual horizonte de tiempo, por lo que su resolución es más rápida. Por otro lado, los modelos discretos son más fácilmente adaptables a prácticas que normalmente se utilizas en las industrias para la programación de las actividades. Existen casos muy frecuentes, tal como ocurre con la planificación de las actividades diarias, ya que en general la misma estará desagregada en termino de horas, o medias horas. Otro caso común es que las restricciones sobre el inventario de un cierto producto fijen que el mismo debe estar disponible una cierta cantidad de días antes de la fecha de embarque, para garantizar la entrega en tiempo y forma del producto. Esta última restricción es critica y en principio parece simple, sin embargo su implementación en modelos de tiempo continuo no es directa. Los modelos encontrados en la bibliografía se encuentran orientados a procesos batch donde el tamaño del lote es conocido a priori, además que en muchos casos se puede suponer que cada lote de producto tiene una fecha de entrega preestablecida [7]. Sin embargo, en el campo industrial de procesos continuos, es práctica frecuente que los lotes tengan tamaño variable y que un cierto pedido de producto sea cubierto con unidades de distintos lotes o con fracciones de los mismos, por lo que la restricción se impone sobre el inventario total del producto y no sobre los lotes. En otros casos se realiza la suposición de que el momento exacto de entrega de un pedido no es relevante, buscando únicamente cumplir que la producción total en el horizonte de tiempo pueda satisfacer la demanda prevista para el mismo [13]. Esta última asunción es adecuada para la planificación estratégica y largo plazo [14], pero no así para el horizonte táctico. Los autores no han encontrado referencias de modelos generalizables en tiempo continuo que admitan tamaños de lotes variables y que contemplen restricciones sobre el nivel de inventario requerido para cumplimentar los pedidos programados. Dichas características son parte central de la planificación táctica en las industrias multiproducto de procesos continuos.

2 Metodología y Modelado

El problema de optimización de la planificación se ha realizado mediante un Programa Mixto Entero Lineal (MILP), que en el presente trabajo se ha desarrollado en veintidós conjuntos de restricciones y una función objetivo. En lo que sigue se describen las principales restricciones que definen el modelo desarrollado.

2.1 Función Objetivo

El objetivo del problema es minimizar la variable Z, que representa la producción total en el horizonte de tiempo. Esto se expresa mediante la ecuación 1.

$$Z = \sum_{slt \in SLT} \sum_{prd \in PRD} ProduccionSlot_{prd,slt} \tag{1}$$

Donde SLT es el conjunto de los slot de tiempo y PRD el conjunto de los productos a considerar.

2.2 Restricciones Generales

El modelo tiene como principal decisión la de asignación de un determinado producto prd a un cierto slot de tiempo slt. Cuando dicha asignación ocurre la variable $DecisionProducto_{slt,prd}$ de iguala a 1, mientras que en caso contrario se le asigna el valor 0. Como condición se debe fijar por cada slot slt, únicamente se puede activar una variable $DecisionProducto_{slt,prd}$. Lo cual se describe mediante la ecuación 2.

$$\sum_{prd \in PRD} DecisionProducto_{slt,prd} = 1 \qquad \forall slt \in SLT \tag{2}$$

Por otra parte, la extensión de un cierto slot slt es una variable que en general podrá considerarse como la suma de un tiempo de preparación y el tiempo de producción. La duración del slot está dada por la ecuación 3. Siendo $DuracionPrd_{slt}$ el tiempo que dura la actividad de producción asignada a un cierto slot de tiempo slt. Por motivos de simplicidad, en este caso se considera un tiempo de preparación de la producción independiente del tipo de producto e igual a $TiempoPrep$.

$$DuracionSlot_{slt} = TiempoPrep + DuracionPrd_{slt} \qquad \forall slt \in SLT \tag{3}$$

A su vez, la variable $DuracionPrd_{slt}$ está relacionada al tamaño de lote en forma aproximadamente proporcional por la ecuación

$$\begin{aligned} ProdHora \cdot DuracionPrd_{slt} \geq TamLote_{slt} \\ - M \cdot (1 - m.DecisionProducto_{slt,prd}) \end{aligned} \qquad \forall slt \in SLT, prd \in PRD \tag{4}$$

$$\begin{aligned} ProdHora \cdot DuracionPrd_{slt} \leq TamLote_{slt} \\ + M \cdot (1 - DecisionProducto_{slt,prd}) \end{aligned} \qquad \forall slt \in SLT, prd \in PRD \tag{5}$$

2.3 Restricciones de Temporización

Un conjunto importante de restricciones son las que gobiernan la cronología de las actividades. En este sentido se utilizan variables continuas para representar el inicio y fin de cada slot slt, las cuales se relacionan a través de la restricción 6.

$$IniSlot_{slt} + DuracionSlot_{slt} = FinSlot_{slt} \qquad \forall slt \in SLT \tag{6}$$

La información contenida en las variables continuas $IniSlot_{slt}$ y $FinSlot_{slt}$, se suman la variables binarias $PrimerSlot_{slt,d}$ y $UltimoSlot_{slt,d}$. Dichas variables se activan cuando un slot slt se corresponde con el primer y último slot de un determinado día d. Las mencionadas variables binarias son necesarias para vincular la cronología de la representación en tiempo continuo con las restricciones de inventario diarios. Las cuatro variables antedichas se vinculan mediante las restricciones 7 y 8.

$$IniSlot_{slt} - LimiteInfDia_{d} \geq -M * (1 - PrimerSlot_{slt,d}) \qquad \forall slt \in SLT, d \in D \tag{7}$$

$$IniSlot_{slt} - LimiteSupDia_{d} \leq +M * (1 - UltimoSlot_{slt,d}) \qquad \forall slt \in SLT, d \in D \tag{8}$$

Donde $LimiteInfDia_{d}$ y $LimiteSupDia_{d}$ son los hitos temporales que marcan el inicio y finalización de la jornada productiva de cada día d, mientras que M es un número positivo muy grande, utilizado para la construcción de las restricciones tipo BigM.

2.4 Restricciones de Inventario

A diferencia de otros modelos donde se realiza el inventario periodo a periodo, en el presente modelo se utiliza una representación donde mediante variables continuas se calcula la producción acumulada al final de cada slot slt, y en los casos que dicho slot sea el último de un cierto día d, entonces se computa el inventario diario, sustrayendo el valor acumulado de los envíos para el día $d+1$. Dicho corrimiento de 1 día para el calculo del inventario sigue la regla práctica que obliga a contar al final de cada día con un inventario superior total los envíos de cada producto prd que estén previstos para el día siguiente. Esta serie de reglas son incorporadas al modelo por las restricciones 9, 10, 11, 12, 13.

$$\begin{aligned} ProduccionAcumulada_{prd,slt} = {} & ProduccionAcumulada_{prd,slt-1} \\ & + ProduccionSlot_{prd,slt} \qquad \forall slt \in SLT, prd \in PRD \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &ProduccionSlot_{prd,slt} \geq TamLote_{slt} \\ &\qquad - M \cdot (1 - DecisionProducto_{slt,prd}) \qquad \forall slt \in SLT, prd \in PRD \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &ProduccionSlot_{prd,slt} \leq TamLote_{slt} \\ &\qquad + M \cdot (1 - DecisionProducto_{slt,prd}) \qquad \forall slt \in SLT, prd \in PRD \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &InventarioDia_{prd,d} \geq ProduccionAcumulada_{prd,slt} \\ &\qquad + inventarioInicial_{prd} - EnviosAcumulados_{prd,d+1} \\ &\qquad - M \cdot (1 - UltimoSlot_{slt,d}) \qquad \forall slt \in SLT, prd \in PRD \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &InventarioDia_{prd,d} \leq ProduccionAcumulada_{prd,slt} \\ &\qquad + inventarioInicial_{prd} - EnviosAcumulados_{prd,d+1} \\ &\qquad + M \cdot (1 - UltimoSlot_{slt,d}) \qquad \forall slt \in SLT, prd \in PRD \end{aligned} \tag{13}$$

2.5 Restricciones de Lógicas

El último grupo de restricciones se encargan de establecer las relaciones lógicas entre las variables de decisión binarias. Dichas restricciones incluyen una nueva variable binaria que completa el modelo matemático indicando en que día d debe ejecutarse cada uno de los slots de tiempo slt; dicha variable se denomina $AsignacionSlotDias_{slt,d}$. Las restricciones lógicas en cuestión son las expresadas por la expresiones 14, 15, 16, 17 y 18.

$$\sum_{d \in D} AsignacionSlotDias_{slt,d} = 1 \qquad \forall slt \in SLT \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &AsignacionSlotDias_{slt-1,d} + AsignacionSlotDias_{slt-1,d-1} \\ &\qquad - AsignacionSlotDias_{slt,d} \geq 0 \qquad \forall slt \in SLT, d \in D \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &AsignacionSlotDias_{slt+1,d} + AsignacionSlotDias_{slt+1,d+1} \\ &\qquad - AsignacionSlotDias_{slt,d} \geq 0 \qquad \forall slt \in SLT, d \in D \end{aligned} \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
1 + UltimoSlot_{slt,d} - AsignacionSlotDias_{slt,d} \\
- AsignacionSlotDias_{slt+1,d+1} \geq 0 \qquad \forall slt \in SLT, d \in D \quad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 + PrimerSlot_{slt,d} - AsignacionSlotDias_{slt,d} \\
- AsignacionSlotDias - slt - 1, d - 1 \geq 0 \qquad \forall slt \in SLT, d \in D \quad (18)
\end{aligned}
$$

3 Implementación

Un modelo para la programación de 7 días de producción fue implementado en lenguaje Python 3.7 mediante el framework de modelado matemático Pyomo 5.5. El modelo recibe entre otros parámetros los productos que se requieren planificar, los envíos acumulados por día de cada uno, la producción por hora y los hitos de tiempo que definen las jornadas de producción. Mediante el solucionador CPLEX se hallaron soluciones óptimas para distintas combinaciones de los parámetros y número de productos a planificar.

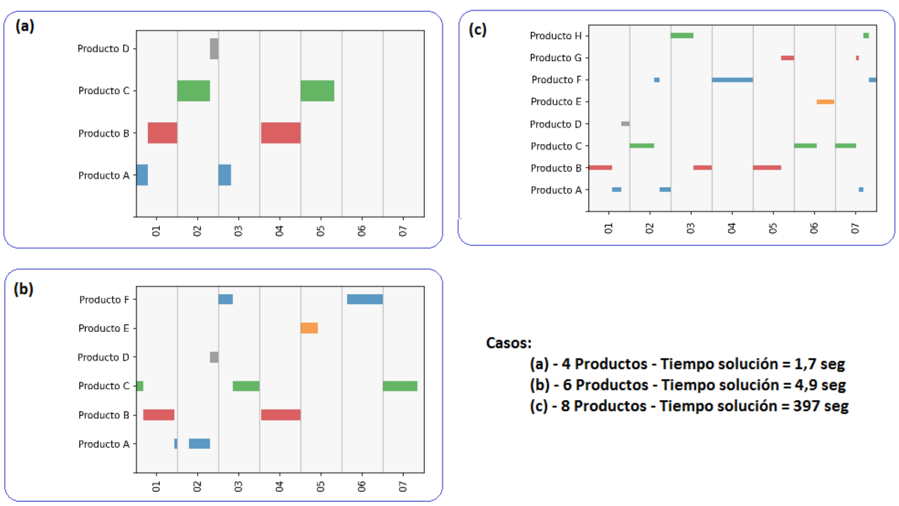

Fig. 1. Gráfico de Gantt de una solución obtenida

4 Análisis del Modelo y Resultados

Para analizar si las soluciones eran factibles para el problema de programación óptima de la producción, se elaboro un algoritmo para el postprocesamiento de las variables de salida, para obtener los diagramas de Gantt correspondientes. En la figura 1 se pueden visualizar soluciones halladas para el problema de programación de la producción con 4, 6 y 8 productos simultáneamente. La resolución de los respectivos casos requirieron 1.7, 4.9 y 397 segundos respectivamente hasta alcanzar optimalidad.

Los tiempos de resolución hasta optimalidad son compatibles con el uso en plantas de producción multiproducto y monolínea pequeñas o medianas, donde el número de productos a programar dentro de la ventana de tiempo pueda permanecer acotado a alrededor de 8 productos o menos.

Por otra parte, al tratarse de un modelo en tiempo continuo, si se mantiene el número de productos acotado, se tiene flexibilidad para variar la ventana temporal sin cambiar por ello el tamaño del problema.

5 Conclusión

Se ha logrado desarrollar un programa de programación de la producción basado en tiempo continuo, que mantiene un inventario diario de todos los productos y generando soluciones que anticipen adecuadamente la producción para evitar problemas de falta de stock ante las ventas previstas, lo cual es compatible con las práctica usuales en las industrias de procesos continuos.

References

1. Heizer, J., & Render, B. (2008). Dirección de la producción y de operaciones. Decisiciones Tácticas.
2. José A.D. Machuca, S. García González, M. Á. Domínguez-Machuca, A. Ruiz Jiménez y María José Álvarez Gil. Dirección de operaciones : aspectos tácticos y operativos en la producción y los servicios. (1994)
3. Dias, L. S., & Ierapetritou, M. G. (2016). Integration of scheduling and control under uncertainties: Review and challenges. Chemical Engineering Research and Design, 116, 98–113. https://doi.org/10.1016/j.cherd.2016.10.047
4. Baldea, M., & Harjunkoski, I. (2014). Integrated production scheduling and process control: A systematic review. Computers and Chemical Engineering, 71, 377–390. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.09.002
5. Pistikopoulos, E. N., & Diangelakis, N. A. (2016). Towards the integration of process design, control and scheduling: Are we getting closer? Computers and Chemical Engineering, 91, 85–92. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2015.11.002
6. Charitopoulos, V. M., Dua, V., & Papageorgiou, L. G. (2017). Closed loop integration of planning, scheduling and control via exact multi-parametric nonlinear programming. In Computer Aided Chemical Engineering (Vol. 40). Elsevier Masson SAS. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63965-3.50214-2
7. Méndez, C. A., Cerdá, J., Grossmann, I. E., Harjunkoski, I., & Fahl, M.: State-of-the-art review of optimization methods for short-term scheduling of batch processes. Computers and Chemical Engineering, 30(6–7), 913–946 (2006). https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2006.02.008

8. Rodríguez, M. A., Vecchietti, A. R., Montagna, J. M., & Corsano, G. (2015). Detailed planning and inventory optimization model in the mattress industry. VIII Congreso Argentino de Ingeniería Química, 1.
9. Shaik, M. A., Floudas, C. A., Kallrath, J., & Pitz, H. J. (2009). Production scheduling of a large-scale industrial continuous plant: Short-term and medium-term scheduling. Computers and Chemical Engineering, 33(3), 670–686. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2008.08.013
10. Baumann, P., & Trautmann, N. (2014). A hybrid method for large-scale short-term scheduling of make-and-pack production processes. European Journal of Operational Research, 236(2), 718–735. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.12.040
11. Floudas, C. A., Akrotirianakis, I. G., Caratzoulas, S., Meyer, C. A., & Kallrath, J.: Global optimization in the 21st century: Advances and challenges. Computers and Chemical Engineering, **29**(6 SPEC. ISS.), 1185–1202, (2005). https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2005.02.006
12. Moreno, M.S. Montagna, J.M. Iribarren, O.A.: A general disjuntive model for multiperiod optimization of multiproduct batch plants. In: XXII IACChE (CIIQ) / V CAIQ on Proceedings. Argentina (2006)
13. Méndez, C. A., & Cerdá, J. (2002). An efficient MILP continuous-time formulation for short-term scheduling of multiproduct continuous facilities. Computers and Chemical Engineering, 26(4–5), 687–695. https://doi.org/10.1016/S0098-1354(01)00789-X
14. Fumero, Y., Montagna, J. M., & Corsano, G. (2012). Simultaneous design and scheduling of a semicontinuous/batch plant for ethanol and derivatives production. Computers and Chemical Engineering, 36(1), 342–357. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2011.08.004